ISSN 2312 9557. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2017, вип. **22**

УДК 517.5

М. Є. Ткаченко*, **В. М. Трактинська****

* Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
Дніпро, 49050. *E-mail: mtkachenko2009@ukr.net*
** Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
Дніпро, 49050. *E-mail: victoria-dp@yandex.ua*

Критерії елемента найкращого несиметричного наближення для функцій зі значеннями у КВ-просторі у метриках просторів L_p і L_1 з вагою

Досліджено питання характеризації елемента найкращого несиметричного L_p- та L_1-наближення для функцій зі значеннями в КВ-просторі з вагою. Одержано критерії елемента найкращого несиметричного наближення для вказаних фунцій у метриках просторів L_p і L_1 з вагою.

Ключові слова: несиметричні норми, функції зі значеннями в КВ-просторі, елемент найкращого несиметричного наближення з вагою.

Исследованы вопросы характеризации элемента наилучшего несимметричного L_p- и L_1-приближения для функций со значениями в КВ-пространстве с весом. Получены критерии элемента наилучшего несимметричного приближения для указанных функций в метриках пространств L_p и L_1 с весом.

Ключевые слова: несимметричные нормы, функции со значениями в КВ-пространстве, элемент наилучшего несимметричного приближения с весом.

The questions of the characterization of the best non-symmetric L_p- and L_1-approximant for the functions with values in KB-space with a weight were considered. The criterions of the best non-symmetric approximant for the specified functions in metrics of the spaces L_p and L_1 with a weight is obtained.

Key words: non-symmetrics norms, the functions with values in KB-space, the best non-symmetric approximant with a weight.

Наведемо спочатку деякі означення з теорії впорядкованих векторних просторів (більш детально див. в [5])

Нехай X – частково впорядкований векторний простір, в якому порядок узгоджений з алгебраїчними операціями.

Для непорожньої множини $E \subset X$ елемент $y \in X$, який задовольняє умови:

1) $x \leq y$ $(x \geq y)$ $\forall x \in E$;

2) якщо елемент $z \in X$ такий, що $x \leq z$ $(x \geq z)$ для будь-якого $x \in E$, то $y \leq z$ $(y \geq z)$, називається супремумом (інфімумом) множини E і позначається

$\sup E$ $(\inf E)$, якщо ж множина E складається зі скінченної кількості елементів $x_1, x_2, ..., x_n$, то їх супремум та інфімум позначаються відповідно $x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$ і $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$.

Якщо в X для довільних двох елементів $x, y \in X$ існує їх супремум $x \vee y$, то елемент $x_+ = x \vee 0$ називають додатною частиною елемента $x \in X$, елемент $x_- = (-x) \vee 0$ – його від'ємною частиною й елемент $|x| = x_+ + x_-$ – модулем елемента x.

Частково впорядкований векторний простір X, в якому порядок узгоджений з алгебраїчними операціями, й для довільних двох елементів $x, y \in X$ існує $x \vee y$, називається KN-лінеалом, якщо в X визначена монотонна норма, тобто норма, для якої, якщо $|x| \leq |y|$, то $||x||_X \leq ||y||_X$.

KN-лінеал, в якому довільна злічена непорожня обмежена згори або знизу множина має відповідно верхню або нижню межі, називається K_σN-простором.

K_σN-простір, в якому норма задовольняє дві додаткові умови:

1) якщо $x_n \downarrow 0$, то $||x_n||_X \to 0$;

2) якщо $x_n \uparrow +\infty$ $(x_n \geq 0)$, то $||x_n||_X \to +\infty$, називається KB-простором.

Нехай Q – метричний компакт з метрикою ρ, Σ –σ-поле борелевських підмножин метричного компакту Q, μ – невід'ємна, скінченна, безатомна міра, додатна на будь-якій непорожній відкритій підмножині Q. Нехай також X – KB-простір з нормою $|| \cdot ||_X$.

Позначимо через $C(Q, X)$ простір неперервних функцій $f : Q \to X$, а через W – множину всіх вимірних дійсних функцій w на Q, таких що

$$0 < \inf\{w(x) : x \in Q\} \leq \sup\{w(x) : x \in Q\} < \infty.$$

.

Для кожного $x \in Q$ та додатних чисел α, β покладемо

$$|f(x)|_{\alpha,\beta} = \alpha \cdot f_+(x) + \beta \cdot f_-(x),$$

$$||f(x)||_{X;\alpha,\beta} = ||\alpha \cdot f_+(x) + \beta \cdot f_-(x)||_X,$$

де $f_\pm(x) = (\pm f(x)) \vee 0$.

Для заданої ваги $w \in W$ введемо для $f \in C(Q, X)$ норму

$$||f||_{p,w;\alpha,\beta} = \left(\int\limits_Q w(x)||f(x)||^p_{X;\alpha,\beta} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $p \geq 1$, і позначимо через $C^w_p(Q, X)$ простір $C(Q, X)$ з уведеною вище нормою.

Для $f \in C^w_p(Q, X)$, $H \subset C^w_p(Q, X)$ величину

$$E(f, H)_{p,w;\alpha,\beta} = \inf\{||f - g||_{p,w;\alpha,\beta} : \quad g \in H\} \tag{1}$$

називатимемо найкращим (α, β)-наближенням функції f множиною H у метриці простору L_p $(p \geq 1)$ з вагою. Елемент із H, який реалізує inf у правій частині

(1), називають елементом найкращого (α,β)-наближення функції f множиною H у метриці простору L_p з вагою.

Множину елементів найкращого (α,β)-наближення функції f в H у метриці L_p з вагою позначимо $P^{(\alpha,\beta)}_{H;p,w}(f)$, множину нулів функції f на Q – через Z_f. Нехай також $N_f = Q \backslash Z_f$.

Для $f, g \in C^w_p(Q,X)$, $p \geq 1$ покладемо

$$\tau^{(\alpha,\beta)}_{-}(f,g)_{p,w} = \lim_{t\to -0} \frac{||f+tg||_{p,w;\alpha,\beta} - ||f||_{p,w;\alpha,\beta}}{t}$$

й для $x \in Q$

$$\tau^{(\alpha,\beta)}_{-}(f(x),g(x))_X = \lim_{t\to -0} \frac{||(f+tg)(x)||_{X;\alpha,\beta} - ||f(x)||_{X;\alpha,\beta}}{t}.$$

Коли $\alpha=\beta=1$, такий функціонал розглядався в [2].

Уведемо також функцію для $x \in Q$

$$r^{(\alpha,\beta)}(f,g,t,x) = \frac{||(f+t\cdot g)(x)||_{X;\alpha,\beta} - ||f(x)||_{X;\alpha,\beta}}{t}.$$

У статті отримано розповсюдження відомого критерію елемента найкращого наближення у метриці просторів L_p $(p>1)$ та L_1 на випадок несиметричного наближення з вагою. Доведені теореми узагальнюють деякі результати робіт [3], [1], [2], [4], [6] та ін.

Теорема 1. *Нехай H – підпростір простору $C^w_p(Q,X)$ $(p>1)$, g^* є елементом найкращого (α,β)-наближення функції $f \in C^w_p(Q,X)$ $(f \neq g^*)$ множиною H у метриці простору L_p $(p>1)$ з вагою тоді і тільки тоді, коли $\forall g \in H$*

$$\int\limits_{N_{f-g^*}} w(x)||(f-g^*)(x)||^{p-1}_{X;\alpha,\beta}\tau^{(\alpha,\beta)}_{-}((f-g^*)(x),g(x))_X d\mu(x) \leq 0. \qquad (2)$$

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай g^* – елемент найкращого (α,β)-наближення функції $f \in C^w_p(Q,X)$ множиною H у метриці простору L_p $(p>1)$ з вагою. Тоді за означенням елемента найкращого наближення $\forall g \in H$

$$\tau^{(\alpha,\beta)}_{-}(f-g^*,g)_{p,w} = \lim_{t\to -0} \frac{||f-g^*+tg||_{p,w;\alpha,\beta} - ||f-g^*||_{p,w;\alpha,\beta}}{t} \leq 0.$$

Враховуючи, що для $p>1$

$$\tau^{(\alpha,\beta)}_{-}(f,g)_{p,w} = ||f||^{1-p}_{p,w;\alpha,\beta}\int\limits_{Q} w(x)||f(x)||^{p-1}_{X;\alpha,\beta}\tau^{(\alpha,\beta)}_{-}(f(x),g(x))_X d\mu(x),$$

маємо

$$\tau^{(\alpha,\beta)}_{-}(f-g^*,g)_{p,w} = \left(\int\limits_{N_{f-g^*}} w(x)||(f-g^*)(x)||^{p}_{X;\alpha,\beta} d\mu(x)\right)^{\frac{1-p}{p}}\cdot$$

$$\cdot \int\limits_{N_{f-g^*}} w(x)||(f-g^*)(x)||^{p-1}_{X;\alpha,\beta}\tau_-^{(\alpha,\beta)}((f-g^*)(x),g(x))_X d\mu(x) \le 0,$$

а оскільки перший множник додатній, то отримуємо нерівність (2).

Доведемо достатність. Нехай тепер має місце нерівність (2). Враховуючи попередні міркування

$$\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f-g^*,g)_{p,w} = \left(\int\limits_{N_{f-g^*}} w(x)||(f-g^*)(x)||^{p}_{X;\alpha,\beta} d\mu(x)\right)^{\frac{1-p}{p}} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{N_{f-g^*}} w(x)||(f-g^*)(x)||^{p-1}_{X;\alpha,\beta}\tau_-^{(\alpha,\beta)}((f-g^*)(x),g(x))_X d\mu(x),$$

отже $\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f-g^*,g)_{p,w} \le 0$, $\forall g \in H$.

Візьмемо $-\infty < t < s < 0$, тоді $|t| > |s|$ і

$$|t| \cdot ||f-g^*-|s|\cdot g||_{p,w;\alpha,\beta} = |||s|(f-g^*-|t|\cdot g)+(|t|-|s|)(f-g^*)||_{p,w;\alpha,\beta} \le$$

$$\le |s|||f-g^*-|t|\cdot g||_{p,w;\alpha,\beta} + (|t|-|s|)||f-g^*||_{p,w;\alpha,\beta}.$$

Отже, враховуючи, що $t=-|t|$, $s=-|s|$, отримуємо

$$|t|(||f-g^*+s\cdot g||_{p,w;\alpha,\beta} - ||f-g^*||_{p,w;\alpha,\beta}) \le |s|(||f-g^*+t\cdot g||_{p,w;\alpha,\beta} - ||f-g^*||_{p,w;\alpha,\beta}).$$

Звідки

$$\frac{||f-g^*+t\cdot g||_{p,w;\alpha,\beta} - ||f-g^*||_{p,w;\alpha,\beta}}{t} \le \frac{||f-g^*+s\cdot g||_{p,w;\alpha,\beta} - ||f-g^*||_{p,w;\alpha,\beta}}{s}.$$

Отже, функція $r^{(\alpha,\beta)}_{p,w}(f-g^*,g,t) = \frac{||f-g^*+t\cdot g||_{p,w;\alpha,\beta} - ||f-g^*||_{p,w;\alpha,\beta}}{t}$ є неспадною на $(-\infty,0)$.

Тому, приймаючи $t=-1$, отримуємо, що $\forall g \in H$

$$||f-g^*||_{p,w;\alpha,\beta} - ||f-g||_{p,w;\alpha,\beta} \le \lim_{t\to -0} r^{(\alpha,\beta)}_{p,w}(f-g^*,g,t) = \tau_-^{(\alpha,\beta)}(f-g^*,g)_{p,w} \le 0.$$

Тобто $g^* \in P^{(\alpha,\beta)}_{H;p,w}(f)$.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай H – підпростір простору $C_1^w(Q,X)$. Елемент g^* є елементом найкращого (α,β)-наближення функції $f \in C_1^w(Q,X)$ в H тоді й тільки тоді, коли $\forall g \in H$*

$$\int\limits_{N_{f-g^*}} w(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f-g^*,g)_X d\mu(x) \le \int\limits_{Z_{f-g^*}} w(x)||g(x)||_{X;\beta,\alpha} d\mu(x). \qquad (3)$$

Доведення. Нехай $g^* \in P^{(\alpha,\beta)}_{H;1,w}(f)$. Оскільки H – підпростір, то $\forall g \in H$

$$||f-g^*||_{1,w;\alpha,\beta} \leq ||f-g^*+tg||_{1,w;\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Тому

$$\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f-g^*,g)_{1,w} = \lim_{t\to-0}\frac{||f-g^*+t\cdot g||_{1,w;\alpha,\beta}-||f-g^*||_{1,w;\alpha,\beta}}{t} \leq 0.$$

Враховуючи, що функція $r^{(\alpha,\beta)}_{1,w}(f,g,t,x)$ не спадає за t й обмежена згори на $(-\infty,0)$, та умови на вагу, за теоремою Б.Леві отримуємо

$$\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f,g)_{1,w} = \int\limits_Q w(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f(x),g(x))_X d\mu(x).$$

А оскільки $\forall g \in H$

$$\int\limits_Q w(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f-g^*,g)_X d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{N_{f-g^*}} w(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f-g^*,g)_X d\mu(x) - \int\limits_{Z_{f-g^*}} w(x)||g(x)||_{X;,\beta,\alpha} d\mu(x), \qquad (4)$$

то отримуємо (3).

Необхідність доведена.

Нехай тепер має місце нерівність (3). Враховуючи (4), маємо, що $\forall g \in H$

$$\int\limits_Q w(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f-g^*,g)_X d\mu(x) \leq 0.$$

Знову, враховуючи неспадання функції $r^{(\alpha,\beta)}_{1,w}(f-g^*,g,t)$ на $(-\infty,0)$ й приймаючи $t=-1$, отримуємо $\forall g \in H$

$$||f-g^*||_{1,w;\alpha,\beta} - ||f-g||_{1,w;\alpha,\beta} \leq \lim_{t\to-0} r^{(\alpha,\beta)}_{1,w}(f-g^*,g,t) =$$

$$= \int\limits_Q w(x)\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f-g^*,g)_X d\mu(x) \leq 0,$$

а отже, $g^* \in P^{(\alpha,\beta)}_{H;1,w}(f)$.

Теорема доведена.

Бібліографічні посилання

1. *Kroo, A.* A General Approach to the Study of Chebyshev Subspaces in L_1-Approximation of Continuous Functions [Текст]/Andras Kroo // J. Approx. Theory. —1987. — № 51. — P. 98–111.
2. *Pinkus, A.* L_1-Approximation [Текст]/A. Pinkus. —Cambridge, 1989. —239 p.
3. *Rozema, E.* Almost Chebyshev subspaces of $L_1(\mu, E)$ [Текст]/E. Rozema // Pacif. J. Math. —1974. — № 53. — P. 585–604.
4. *Бабенко, В. Ф.* Вопросы единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения непрерывных функций со значениями в КВ-пространствах [Текст]/ В. Ф. Бабенко, М. Е. Ткаченко // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 7. — С. 867–878.
5. *Вулих, Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств [Текст]/Б. З. Вулих. —М, 1961. —407 с.
6. *Ткаченко, М. Є.* Критерій елемента найкращого несиметричного L_p-наближення неперервних функцій зі значеннями в КВ-просторах [Текст]/ М. Є. Ткаченко, В. М. Трактинська, К. О. Шкуратюк // Зб. центру наук. публ. за мат. II Міжн. конф. "Весняні наукові читання 1 частина. —К., 2016. — С. 31–36.

Надійшла до редколегії 01.05.2017